Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux)**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités et contrôle de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtssam.fr/assets/annales/bts-sam/E2 - Mathématiques/2022/BTS SAM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m/s au début du freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. L’exercice étudie cette fonction au moyen d’une équation différentielle, de limites et variations, d’une intégrale pour la distance parcourue et d’un développement limité.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

L’équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D’après la formule fournie, ses solutions sont les fonctions exponentielles $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient toutes les solutions sur l’intervalle considéré. On peut vérifier qu’elles conviennent puisque leur dérivée vaut $-0,8ke^{-0,8t}$, donc $y' + 0,8y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par $g(t) = 5$ et y' par zéro dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est donc égal au second membre pour tout $t \in [0; +\infty[$. Cela vérifie que g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Les solutions de l’équation différentielle complète s’obtiennent en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions de l’équation homogène associée (E_0). Or, d’après la question 1.a, ces solutions sont $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. L’ensemble des solutions de (E) est donc la famille suivante, définie sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la question précédente, une solution de (E) s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donnée dans l'énoncé impose $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, on a $5 + k = 20$, donc $k = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction qui modélise la vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression donnée dans la partie B : $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 5. Par somme des limites, on obtient la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Une limite finie de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ donne une asymptote horizontale à la courbe représentative de f. La limite établie à la question précédente vaut 5. L'asymptote est donc la droite horizontale dont l'ordonnée est 5. Cette conclusion concorde avec l'expression de f, car le terme exponentiel tend vers zéro à l'infini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f', dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

L'énoncé donne $f'(t) = -12e^{-0,8t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau ci-dessous résume ces informations et les variations de la fonction.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi strictement positive à tout instant fini. Elle décroît et tend vers 5, sans atteindre zéro. Selon le modèle donné, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et ne s'annule pas.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation d'une exponentielle composée, $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Donc $F' = f$ sur l'intervalle considéré et F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$: F est une primitive de f.

Question 4. b. En utilisant la formule de l'énoncé pour la distance parcourue entre deux instants, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance demandée est $d = \int_0^1 f(t)\,dt$. Puisque F est une primitive de f, le théorème fondamental donne $d = F(1) - F(0)$. En utilisant l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette expression est exacte ; son arrondi au centimètre s'obtient en gardant deux chiffres après la virgule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les expressions proposées, recopier l'unique réponse donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions de l'énoncé, la seule qui reprend ce polynôme avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, est la troisième. La réponse attendue est donc celle-ci, sans justification supplémentaire.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient une droite de pente -12 passant par le point $(0; 20)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$.

2. Probabilités et contrôle de produits industriels

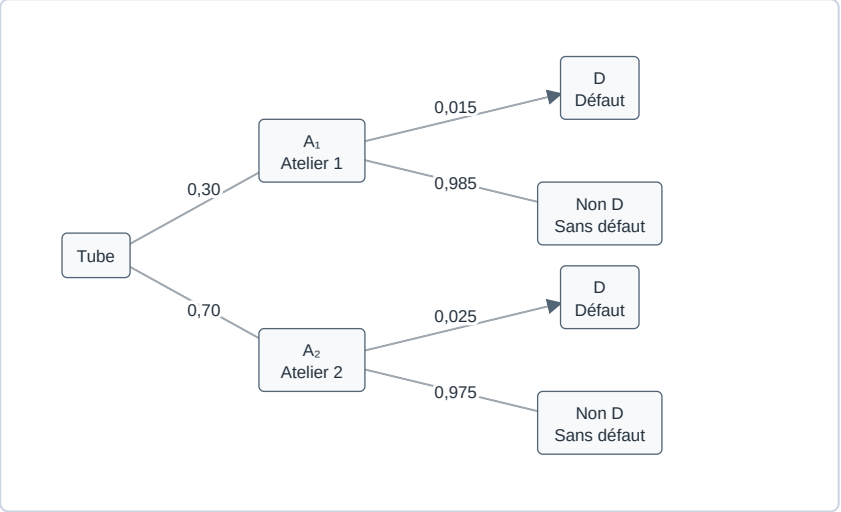
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers ayant des parts de production et des taux de défaut différents. L'exercice porte aussi sur la durée de fonctionnement des tubes, modélisée par une loi exponentielle, et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes utilisés pour leur fixation.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la provenance du tube et la présence ou l'absence d'un défaut, à partir des données sur les deux ateliers.

Les premières branches représentent la provenance du tube. Depuis chaque atelier, on distingue un tube défectueux et un tube sans défaut, avec les probabilités conditionnelles indiquées dans l'énoncé.

Provenance et présence d'un défaut



Les probabilités des deux branches issues de chaque atelier totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : atelier 1 (0,30), défaut (0,015), sans défaut (0,985) ; atelier 2 (0,70), défaut (0,025), sans défaut (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

On multiplie la probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 par la probabilité d'un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Un tube défectueux provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. Ces cas étant incompatibles, on additionne leurs probabilités :
$P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité d'absence de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et soit sans défaut vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. Donc :
$P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}001} = 1\,000$. Elle représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ainsi :
$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$. La loi étant continue, les probabilités pour $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ sont égales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t est le complément de la probabilité d'une durée inférieure ou égale à t : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$:
$P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon : $\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée et arrondir ses bornes au millième.

Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, on applique la formule de l'énoncé :
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Les bornes obtenues sont environ 0,965323 et 0,984677 ; on les arrondit au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie le freinage d'un chariot de fête foraine et le contrôle de tubes et de rivets en usine. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- La probabilité conditionnelle vérifie P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B), lorsque P(B) > 0.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est centré sur f et utilise les bornes f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution générale d'une équation différentielle de celle déterminée par la condition initiale.
- Pour établir les variations, étudier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle demandé.
- Dans un arbre pondéré, multiplier les probabilités le long d'une branche et additionner les branches pertinentes.
- Respecter les arrondis et donner les unités ou l'interprétation demandées dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser une condition initiale pour déterminer une solution particulière ?

Déterminez d'abord la forme générale des solutions de l'équation. Remplacez ensuite la variable par la valeur initiale et la fonction par sa valeur connue afin de calculer la constante, puis vérifiez que la condition est satisfaite.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un arbre ?

Repérez l'événement conditionnant et l'événement recherché. Calculez la probabilité de leur intersection, puis divisez-la par celle de l'événement conditionnant. L'arbre permet d'obtenir les probabilités des branches utiles.

Q : Comment organiser son temps et répartir ses efforts dans cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices notés chacun sur 10 points. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions indépendantes et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quels critères de présentation et d'arrondi faut-il respecter ?

Présentez les calculs nécessaires pour justifier les résultats et adaptez les réponses au contexte. Respectez la précision indiquée : au centième pour certaines probabilités, au millième pour l'intervalle et au centimètre pour la distance.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtssam.fr/assets/annales/bts-sam/E2 - Mathématiques/2022/BTS SAM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS SAM Support à l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.