Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques - Groupement B des BTS

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — Page 3

2. **Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique** (9 questions) — Page 7

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 10

**Sujet officiel (PDF) :** https://coursbtssam.fr/assets/annales/bts-sam/E2 - Mathématiques/2022/BTS SAM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

# 1. Modélisation de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, propulsé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son comportement, la distance parcourue et son approximation locale.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[ l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.**

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,8y$. D'après la forme des solutions de $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$, toute solution sur $[0; +\infty[$ est de la forme $y(t) = ke^{-0,8t}$, où $k$ est une constante réelle. Réciproquement, cette expression vérifie l'équation pour tout $t \geq 0$ : sa dérivée vaut $-0,8ke^{-0,8t}$, qui compense le terme $0,8y(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

---

**Question 1.b. Soit g définie sur [0 ; +∞[ par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la remplaçant dans le membre de gauche de $(E)$, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vraie pour tout $t \geq 0$, donc $g$ vérifie bien l'équation différentielle donnée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$ : $g$ est solution de $(E)$.

---

**Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de $(E)$. Toutes les solutions de cette équation s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène associée $(E_0)$. Or celles-ci sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec $k$ réel. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

---

**Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, car $e^0 = 1$. On trouve donc $k = 15$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t$ tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers $0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers $0$, tandis que le terme constant reste égal à $5$. La limite de la somme est donc égale à $5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1.b. En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote et en donner une équation.**

Comme $f(t)$ tend vers $5$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$, la courbe $C$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Son équation est celle de la droite dont l'ordonnée reste égale à la limite de $f$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

**Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction $f$ est strictement décroissante. Elle vaut $20$ en $t = 0$ et tend vers $5$ à l'infini. Son tableau de variation est donc :

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $20$ | $5$ |

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ décroît de $20$ vers $5$ sur $[0; +\infty[$.

**Question 3.** **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi strictement positive : elle décroît vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans jamais atteindre zéro. Dans le cadre de ce modèle, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et ne s'annule pas.

**Question 4.a.** **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Ainsi, $F$ est bien une primitive de $f$ sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

**Question 4.b.** **En utilisant l'intégrale de la vitesse pour exprimer la distance parcourue, calculer la distance exacte parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Or $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. Ainsi, $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres, soit environ $15,3251$ mètres. L'arrondi au centimètre est donc $15,33$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

## Partie C - Étude locale

**Question 1.** **Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

Le développement limité affiché donne les termes $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers $0$ lorsque $t$ tend vers $0$. Cela correspond à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse $0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, $f'(0) = -12e^{0} = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur $-12$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

## 2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

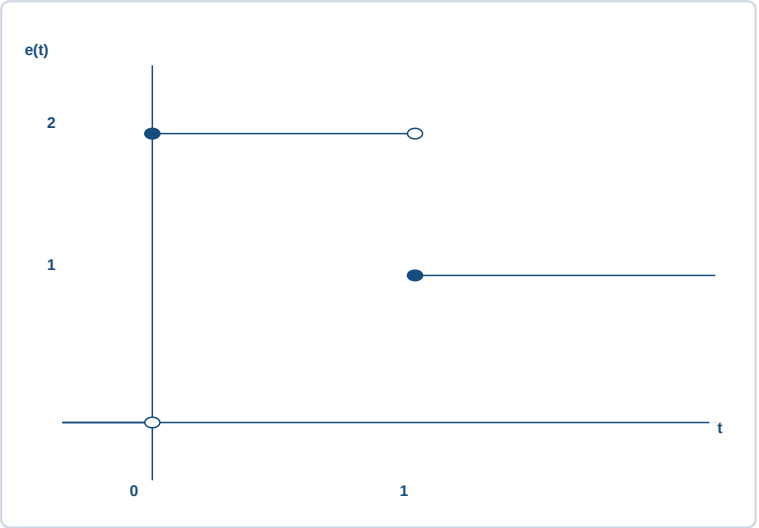
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède une fonction de transfert donnée. Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal d'entrée et à établir l'expression, le tracé et la limite du signal de sortie.

### Partie A - Signal d'entrée

**Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative du signal d'entrée e(t).**

La fonction échelon vaut 0 avant 0 et 1 à partir de 0. Ainsi, le terme $2U(t)$ fait passer le signal de 0 à 2 en $t = 0$. Le terme $-U(t-1)$ le diminue ensuite de 1 à partir de $t = 1$. Les points correspondant aux valeurs prises aux instants de saut sont donc $e(0) = 2$ et $e(1) = 1$.

Signal d'entrée e(t)




✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

**Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).**

Par linéarité, la transformée de $2U(t)$ est $2/p$. D'après le formulaire, la transformée de l'échelon retardé $U(t-1)$ est $e^{-p}/p$. En soustrayant les deux transformées, on obtient l'expression de $E(p)$. Le retard d'une unité est donc représenté par le facteur exponentiel $e^{-p}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

## Partie B - Signal de sortie

**Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).**

La fonction de transfert donnée est $H(p) = 1/(p+1)$, et la relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on multiplie les deux termes du numérateur par $1/[p(p+1)]$. Cela donne bien la décomposition demandée, avec un terme retardé par le facteur $e^{-p}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

**Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).**

Pour vérifier l'égalité, on réduit les deux fractions de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$, ce qui redonne exactement le membre de gauche. L'égalité est valable pour les valeurs de $p$ pour lesquelles les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

**Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, 1/(p + 1), (1/p)e^(-p) et [1/(p + 1)]e^(-p), en utilisant le formulaire.**

Le formulaire donne directement les inverses de $1/p$ et $1/(p+1)$. Pour les deux expressions contenant $e^{-p}$, on applique la propriété de retard d'une unité : si $F(p)$ correspond à $f(t)$, alors $F(p)e^{-p}$ correspond à $f(t-1)U(t-1)$. On applique cette propriété aux fonctions correspondantes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

**Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition précédente donne $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$. Les deux termes non retardés de $S(p)$ ont donc pour transformée inverse $2U(t) - 2e^{-t}U(t)$. Les termes retardés sont multipliés par $U(t-1)$ et sont nuls pour $0 \leq t < 1$. Il reste ainsi l'expression indiquée ci-dessous sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

**Question 5.a.** **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

On utilise l'expression valable pour $t \geq 1$ et on remplace $t$ par 1 : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e/e = 1$, cette expression se simplifie en $2 - 2/e$. Numériquement, elle vaut environ $1{,}2642$, ce qui s'arrondit au dixième à $1{,}3$.

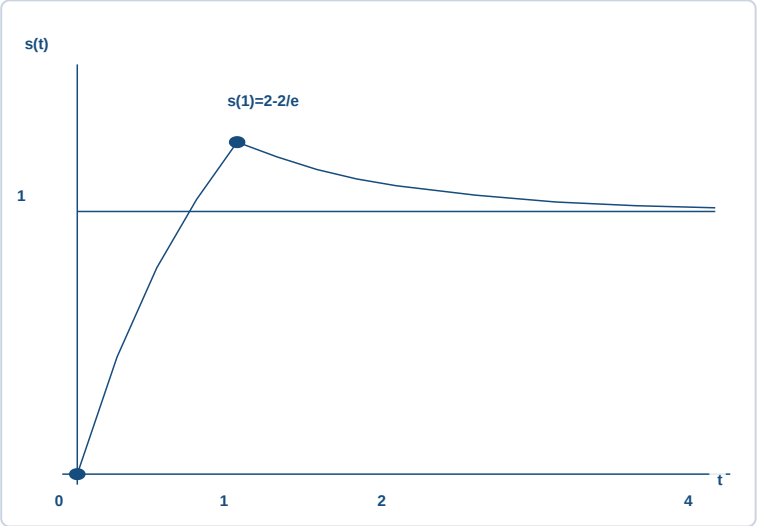
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

**Question 5.b.** **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0, 1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ et décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, soit $2 - 2/e$. La courbe est donc continue en ce point et atteint là son maximum.

**Courbe du signal de sortie s(t)**




✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe part de $(0, 0)$, atteint $(1, 2 - 2/e) \approx (1, 1{,}26)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

**Question 5.c.** **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, le terme exponentiel $e^{-t}$ tend vers 0. Le produit $(e-2)e^{-t}$ tend donc également vers 0, et la limite de $s(t)$ est le terme constant restant.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique par équations différentielles, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p.
- Le retard de a unités dans le temps correspond au facteur e^(-ap) dans le domaine de Laplace.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale à la solution générale pour déterminer la constante.
- Relier le signe de la dérivée aux variations et interpréter la limite pour conclure sur l'arrêt du chariot.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et respecter l'unité.
- Tenir compte des retards temporels et reporter les deux tracés demandés sur le document-réponse.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment exploiter la condition initiale dans une équation différentielle ?**

Déterminez d'abord la solution générale, puis remplacez la variable par sa valeur initiale et la fonction par la valeur imposée. L'égalité obtenue fixe la constante et permet d'écrire la solution particulière.

**Q : Comment reconnaître l'effet du facteur e^(-ap) dans une transformée de Laplace ?**

Le facteur e^(-ap) correspond à un retard de a unités de temps. Dans le domaine temporel, la fonction est décalée de a et multipliée par l'échelon U(t - a), conformément à la propriété du formulaire.

**Q : Comment répartir le temps pendant cette épreuve de deux heures ?**

Les deux exercices valent chacun 10 points. Une répartition équilibrée est raisonnable, en réservant du temps aux calculs, aux tracés sur le document-réponse et à la vérification des résultats et des unités.

**Q : Le sujet donne-t-il un barème détaillé pour chaque question ?**

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices, sans ventilation détaillée par question. Pour le QCM de l'exercice 1, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://coursbtssam.fr/assets/annales/bts-sam/E2 - Mathématiques/2022/BTS SAM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
**Ressources BTS SAM Support à l\ :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.